Hoofdstuk 1 Spiegelen in lijn en in cirkel. Eigenschappen.



Jakob Steiner (Utzenstorf (kanton Bern), 18 maart 1796 - Bern, 1 april 1863) was een Zwitsers wiskundige. Hij wordt beschouwd als een van de belangrijkste meetkundigen uit zijn tijd. Steiner kende het proces van inversie. Hij hield zijn inzichten vóór zich om later zijn collega's te verrassen met het oplossen van zeer lastige meetkunde-problemen.

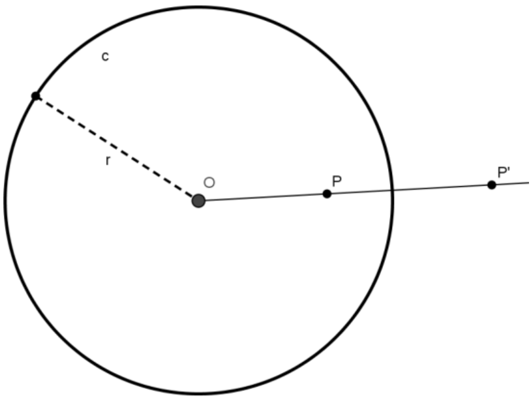
1.1 Hoe spiegel je in een cirkel?

We kennen het voorschrift om een willekeurig punt in een lijn te spiegelen. We gaan nu kijken naar het voorschrift voor het spiegelen van een willekeurig punt in een cirkel.

We geven eerst de definitie van spiegelen in een cirkel.

Definitie

In figuur 1.1.1 is een cirkel *c* getekend met middelpunt *O* en straal *r*. *P* is een willekeurig punt in het vlak dat niet met punt *O* samenvalt. Vanuit punt *O* is halflijn *OP* getekend.



Een ander woord voor cirkelspiegeling is "*Inversie*".

Figuur 1.1.1

P' ligt op halflijn *OP* zodat geldt: $OP \cdot OP' = r^2$.

De punten *P* en P' noemen we elkaars inversiebeeld (spiegelbeeld) ten opzichte van de cirkel. Het vinden van inversiebeeld P' noemen we ook wel *inverteren*.

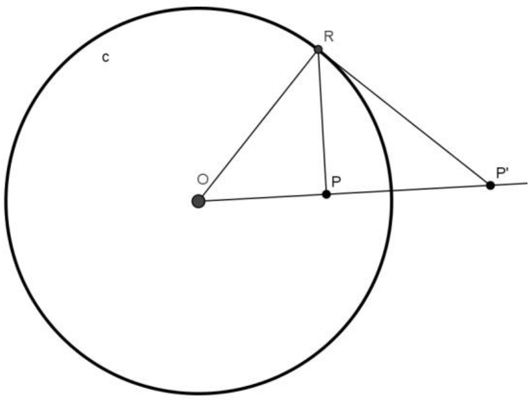
Bij iedere cirkel *c* hoort een afbeelding spiegeling in cirkel *c*. We schrijven: I_c.

Als het duidelijk is om welke cirkel het gaat laten we index *c* gewoon weg.

Er geldt dus: $I(P) = P'$ en $I(P') = P$.

Hoe construeer je inversiebeelden?

Eerst beginnen we met een punt *P* **binnen** de inversiecirkel en construeren het inversiebeeld P'. Zie figuur 1.1.2 .



Richt een loodlijn in *P* op lijn *OP*. Noem snijpunt met cirkel "*R*".

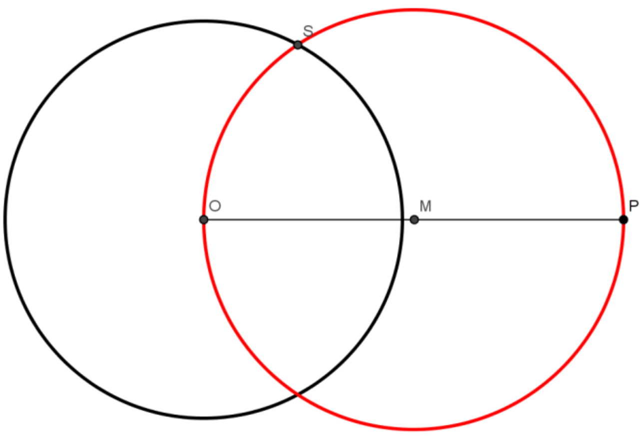
Trek door *R* de loodlijn op *OR* en snijd deze lijn met halflijn *OP*: P'.

Figuur 1.1.2

Opgave 1.1.1

a. Leg uit dat ΔOPR gelijkvormig is met $\Delta ORP'$.
b. Laat zien dat *P* en P' elkaars inversiebeelden zijn.

Nu nemen we een punt *P* **buiten** de inversiecirkel. Zie figuur 1.1.3 . We willen de constructie in figuur 1.1.2 in omgekeerde richting doen. We zoeken dus een punt op de inversiecirkel zodat de straal naar dit punt een rechte hoek maakt met het verbindingslijnstuk van dit punt met *P*.



We tekenen eerst een cirkel met *OP* als middellijn. Noem een van de snijpunten van deze cirkel met de inversiecirkel "*S*".

Figuur 1.1.3

Opgave 1.1.2 GEO

a. Beredeneer waarom $\angle OSP = 90^\circ$.

b. Voer tekening 1.1.3 in GeoGebra (kies zelf de grootte van de straal) en laat uit punt *S* een loodlijn neer op *OP* en noem het voetpunt P'.

c. Laat zien dat *P* en P' elkaars inversiebeelden zijn.

Opgave 1.1.3

a. Bewijs dat elk punt op de inversiecirkel op zich zelf wordt afgebeeld.

b. Beredeneer dat elk punt *P* binnen de inversiecirkel behalve punt *O* wordt afgebeeld in het buitengebied van de cirkel en andersom dat elk punt *P* in het buitengebied wordt afgebeeld in het binnengebied van de inversiecirkel.

Merk op:

- Dat elke inversie de eigenschap heeft, die we in het dagelijkse leven noemen: “*binnenste buiten keren*”.
- Punt *O* doet niet mee! Dit punt wordt niet gespiegeld en treedt niet op als spiegelbeeld.
- Dat elk punt in het binnen gebied correspondeert onder inversie met een punt in het buitengebied is precies de reden van de definitie van cirkelspiegeling met $OP \cdot OP' = r^2$

Opgave 1.1.4

a. Teken een cirkel in je schrift. Noem die : “*c*”, zijn middelpunt “*O*” en zijn straal “ *r*”. Teken nog een cirkel *s* die ook *O* als middelpunt heeft en met straal “*R*”.

Laat inversie I_c werken op alle punten van cirkel *s*.

b. Teken de verzameling van inversiebeelden en beschrijf deze verzameling.

1.2 Is er een verband tussen spiegelen in een lijn en spiegelen in een cirkel?

Met behulp van twee opgaven probeer je dit verband te achterhalen.

Opgave 1.2.1 GEO

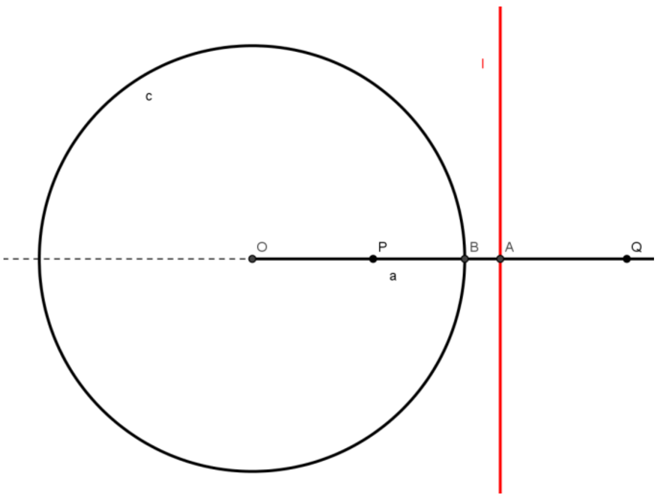


Figuur 1.2.1

In figuur 1.2.1 is een halflijn getekend met O als eindpunt. Op deze halflijn zijn twee punten P en Q getekend verschillend van punt O.

- **a.** Neem figuur 1.2.1 over in het tekenvenster van GeoGebra en teken een cirkel met O als middelpunt zodanig dat P en Q elkaars inversiebeelden zijn ten opzichte van die cirkel.
- **b.** Hoeveel van zulke cirkels zijn er?

Opgave 1.2.2 GEO Inversiecentrum verschuiven

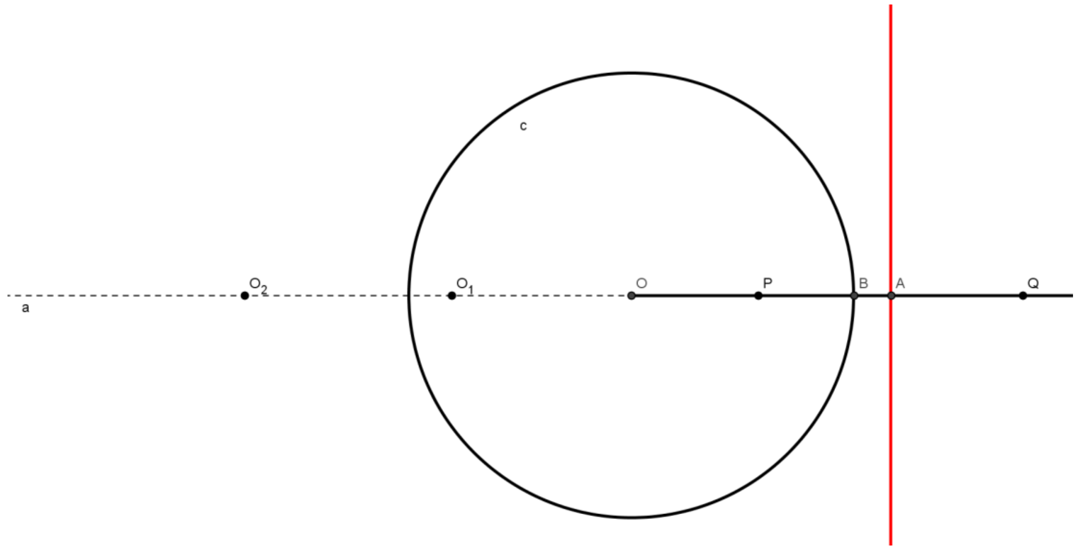


Figuur 1. 2.2

Op een horizontale lijn a zijn drie verschillende punten getekend: O, P en Q. Vervolgens is de middelloodlijn l getekend van lijnstuk PQ. Deze lijn l snijdt lijn a in punt A.

- **a.** Leg uit dat de punten P en Q elkaars spiegelbeeld zijn ten opzichte van lijn l.

Ook in figuur 1.2.2 is een cirkel *c* getekend met *O* als middelpunt zodat *P* en *Q* elkaars inversiebeeld zijn ten opzichte van deze cirkel. Het snijpunt van deze cirkel met lijnstuk *PQ* noemen we punt *B*.



Figuur 1.2.3

In figuur 1.2.3 is de tekening van figuur 1.2.2 uitgebreid met de punten O_1 en O_2. Deze punten liggen steeds verder af van punt *P*.

b. Neem figuur 1.2.3 over in je tekenvenster en teken de cirkel c_1 met O_1 als middelpunt én waarvoor geldt dat de punten *P* en *Q* elkaars inversiebeelden zijn ten opzichte van deze cirkel.

Het snijpunt van c_1 met lijnstuk *PQ* noemen we B_1.

c. Teken cirkel c_2 met O_2 als middelpunt waarvoor geldt dat de punten *P* en *Q* elkaars inversiebeelden zijn ten opzichte van deze cirkel. Het snijpunt van c_2 met lijnstuk *PQ* noemen we B_2.

d. Ga nu zelf zo verder totdat je een vermoeden krijgt.

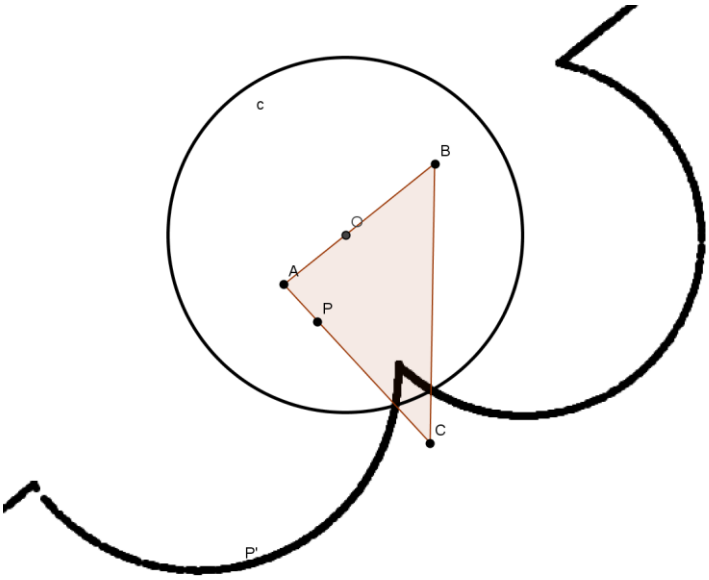
Naarmate je *O* verder weg kiest op lijn *a*, des te dichter komt punt *B* bij punt *A* en des te groter is de straal van cirkel *c*. Je zou kunnen zeggen:

Naarmate je *O* (inversiecentrum) verder weg kiest op lijn *a* des te meer gaat inversiecirkel *c* lijken op spiegellijn *l*, in ieder geval in de buurt van lijn *a*.

1.3 Het inzetten van GeoGebra om vermoedens te ontwikkelen

We gaan kijken hoe we gebruik kunnen maken van het tekenprogramma GeoGebra om vermoedens te ontwikkelen over de inversiebeelden van lijnstukken en rechte lijnen. We spiegelen een driehoek in een cirkel.

In figuur 1.3.1 is te zien, dat in het tekenvenster van GeoGebra een cirkel c is getekend met een ΔABC waarbij punt O op zijde AB ligt. Een voor de hand liggende vraag is “wat is het inversiebeeld van ΔABC ten opzichte van cirkel c?”.



Figuur 1.3.1

Opgave 1.3.1 GEO Spiegelen van een driehoek in een cirkel

a. Neem cirkel en driehoek over in het tekenvenster van GeoGebra.

We kiezen een willekeurig punt P op bijvoorbeeld zijde AC. Met de optie “inversie van punt” kun je het inversiebeeld van P tekenen. Dit punt noemen we P'.

b. Teken het inversiebeeld P' van punt P.

Punt P kun je verschuiven over de omtrek van de driehoek.

c. Verschuif punt P in je tekenvenster en kijk wat er gebeurt met de positie van P'.

Al die posities vormen een baan. Die baan kunnen we verkrijgen door bij P' het spoor aan te zetten.

d. Laat in je tekenvenster dat spoor zien en vergelijk dat met de tekening in figuur 1.3.1.
e. Ga na waar de inversiebeelden liggen van de hoekpunten van de driehoek.
f. Heb je een vermoeden hoe het inversiebeeld van ΔABC is samengesteld?

Opgave 1.3.2 GEO

a. Teken in je tekenvenster weer een cirkel *c* met middelpunt *O*.

We gaan in deze cirkel spiegelen.

b. Teken nu een ΔABC waarbij punt *O* binnen de driehoek ligt.

c. Teken met de optie “ inverse van een punt” de inversiebeelden van de drie hoekpunten.

Kies weer een willekeurig punt *P* op één van de zijden van ΔABC. We laten punt *P* weer de omtrek van ΔABC doorlopen.

d. Teken P' en vervolgens het spoor van punt P'.

e. Heb je een vermoeden hoe het inversiebeeld van ΔABC is samengesteld?

f. Geef ΔABC nog eens een andere ligging en onderzoek hoe het inversiebeeld eruit ziet.

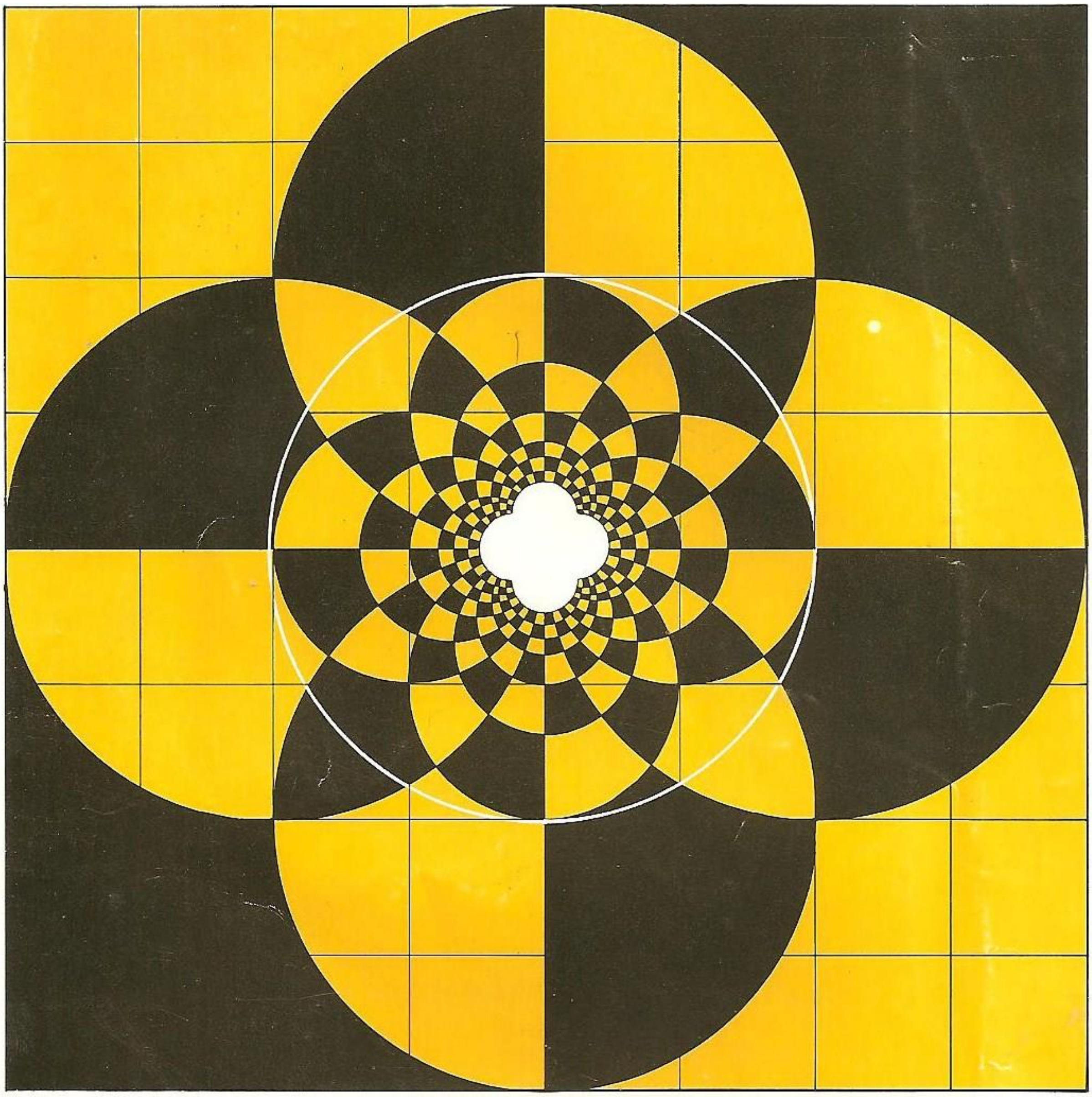
Na wat vermoedens geformuleerd te hebben, willen we weten wat de inversiebeelden zijn van lijnstukken en rechte lijnen.

Dit bekijken we in de volgende paragraaf aan de hand van een schaakbord.

Het is zeer raadzaam om in alle opdrachten die voorzien zijn van logo **GEO** het programma **GeoGebra** ook echt in te zetten.

1.4 Wat is er met het schaakbord gebeurd?

We onderzoeken de figuur op de omslag van een nummer van een bekend tijdschrift en gaan een verband zien met Inversie.



Figuur 1.4.1

In figuur 1.4.1 is afgebeeld de figuur op de omslag van een nummer van een wiskundetijdschrift voor jongeren, Pythagoras en wel van het oktober-nummer van jaargang 1974. De figuur heeft iets te maken met een schaakbord en er is een witte cirkel te zien. Op de binnenzijde van de omslag van dit nummer staat de volgende toelichting:

Bij de figuur op de omslag

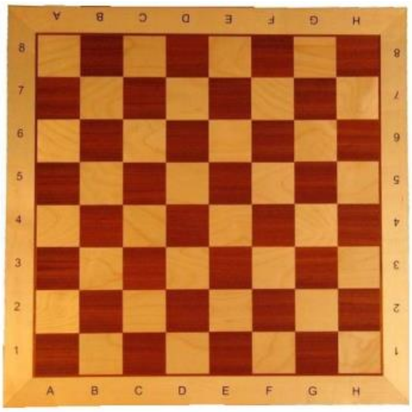
Een schaakbord "binnenstebuiten" gekeerd. De lijnen van het oorspronkelijke schaakbord bakenen 64 vierkanten af. Eigenlijk zouden de vierkanten afwisselend zwart en wit moeten

zijn. De eroverheen liggende figuur is het binnenstebuiten gekeerde schaakbord. Hier zijn de velden wel verschillend van kleur. De velden die in het oorspronkelijke schaakbord de hoekpunten vormden zijn nu vlak bij het midden gekomen; het centrum van het oorspronkelijke schaakbord strekt zich vanaf de rand van deze tekening tot in het oneindige.

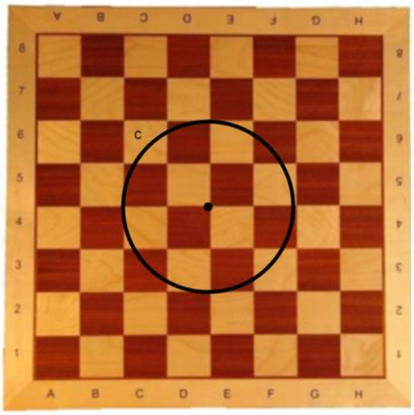
Deze toelichting roept de volgende vraag op:

Wat is er nu precies met het schaakbord gebeurd?

Laten we eens bekijken hoe een schaakbord er precies uitziet. Zie figuur 1.4.2.



Figuur 1.4.2



Figuur 1.4.3

Het speelveld is opgebouwd uit 9 verticale en 9 horizontale lijnen. Deze lijnen bakenen 64 vierkanten af. Deze vierkanten zijn afwisselend zwart en wit. Op de omslag van tijdschrift Pythagoras is een gewoon schaakbord te zien van 8 bij 8 velden maar daarbinnen zien we deels het inversiebeeld van een "vergroot schaakbord" van maar liefst 16 bij 16 velden.

In figuur 1.4.3 is nu het schaakbord voorzien van een cirkel *c*. We gaan spiegelen in cirkel *c*.

De kernvraag wordt nu: " **Wat is het inversiebeeld van een schaakbord**?"
Deze vraag kunnen we vervangen door: " **Wat is het inversiebeeld van een rechte lijn**?"

Opgave 1.4.1 GEO Inversiebeeld van een lijn die door het inversiecentrum gaat

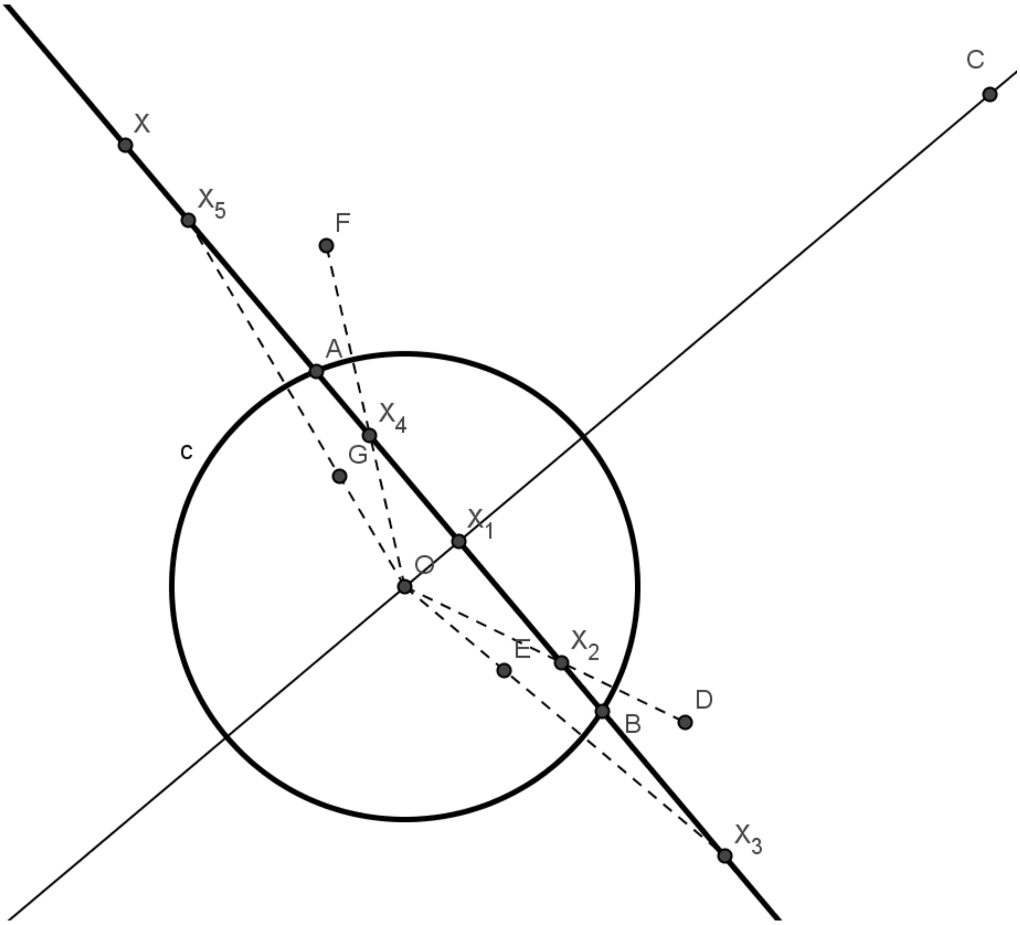
a. Teken in het tekenvenster van GeoGebra een cirkel *c* met middelpunt *O*. Teken ook een willekeurige lijn door *O*.

Met lijn *l* bedoelen we nu de lijn die jij getekend hebt met perforatie *O*. (lijn met punt *O* eruit geprikt)

Kies een paar punten op lijn *l* en noem ze achtereenvolgens $X_1, X_2, X_3...$

b. Teken nu met behulp van knop “inversie van punt” de inversiebeelden en schrijf op wat het inversiebeeld is van lijn *l*.

In figuur 1.4.4 is een cirkel *c* getekend met middelpunt *O*. Er is een lijn *l* getekend die niet door *O* gaat en die de cirkel in twee punten snijdt. Ook is er een loodlijn neergelaten vanuit *O* op *l*. Het voetpunt noemen we X_1. Inversie I laten we werken op elk punt van lijn *l*. Van een aantal punten op l is het inversiebeeld al getekend. Bijvoorbeeld punt *C* is het inversiebeeld van X_1. Punt *D* is het inversiebeeld van X_2. Punt *E* is het inversiebeeld van X_3. Enz. De vraag is nu:” wat is de verzameling van de inversiebeelden van alle punten van lijn *l*?”.



Figuur 1.4.4

Opgave 1.4.2 GEO Inversiebeeld van een lijn die niet door inversiecentrum gaat

a. Neem de tekening van figuur 1.4.4 over in het tekenvenster van GeoGebra en inverteer net zolang totdat je een vermoeden hebt.

b. Wat kun je zeggen over de grootten van de volgende hoeken: $\angle CDO$, $\angle CEO$, $\angle CFO$ en $\angle CGO$?

c. Formuleer je vermoeden precies en probeer de verzameling van inversiebeelden te tekenen.

d. Bewijs je vermoeden.

e. Teken een andere lijn, bijvoorbeeld die de cirkel niet snijdt, en herhaal de vragen a, b en c.

f. Probeer de volgende twee zinnen op een verstandige manier aan te vullen:

*Voor elke lijn die **niet** door het centrum van de inversiecirkel gaat geldt dat het inversiebeeld is…………………………………*   *Voor elke lijn die door het centrum van de inversiecirkel gaat geldt dat het inversiebeeld is…………………………………*

Opgave 1.4.3 GEO

a. Teken in het tekenvenster een cirkel *c* en een lijn *l* .

Noem de verzameling van alle lijnen die met *l* evenwijdig zijn *V*.

b. Teken een paar van die lijnen en spiegel ze in cirkel *c*.

c. Schrijf op wat het inversiebeeld is van verzameling *V*.

Opgave 1.4.4 GEO

a. Teken in het tekenvenster een cirkel *c* en een punt *T* .

Noem de verzameling van alle lijnen die door punt *T* gaan *W*.

b. Teken een paar van die lijnen en spiegel ze in cirkel *c*.

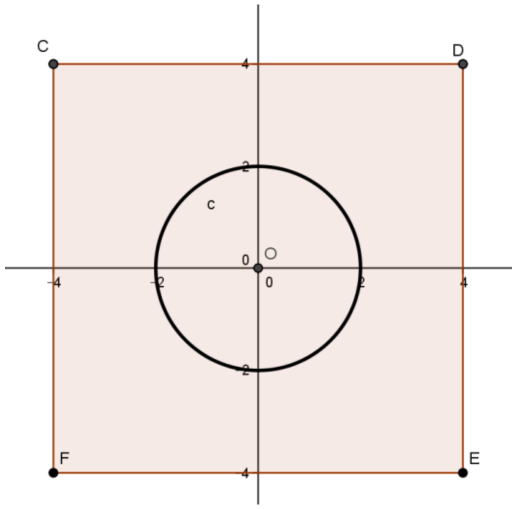
c. Schrijf op wat het inversiebeeld is van verzameling *W*.

d. Bekijk ook het bijzondere geval dat punt *T* samenvalt met het middelpunt van cirkel *c*.

We gaan nu aan de slag met het schaakbord.

Opgave 1.4.5 GEO

a. Teken met GeoGebra een cirkel *c* met straal 2 en de oorsprong als middelpunt. Teken ook een vierkant van 8 bij 8 met de oorsprong als middelpunt op de manier waarop dat in figuur 1.4.5 is gedaan.



Figuur 1.4.5

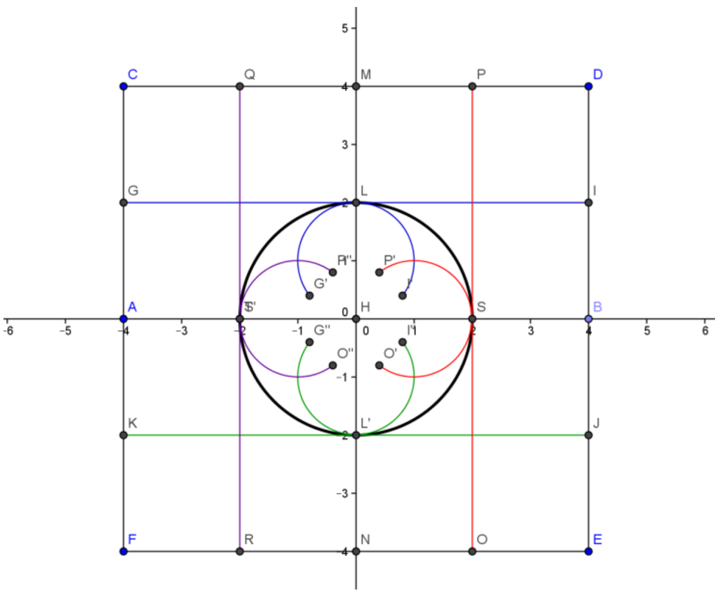
b. Spiegel vierkant *CDEF* in cirkel *c*.

c. Ga na wat het inversiebeeld is van het buitengebied van het vierkant.

Zie het witte gedeelte van de afbeelding in figuur 1.4.1.
d. Verklaar dit witte gedeelte in relatie tot een vergroot schaakbord (16 bij 16 velden).

Opgave 1.4.6 GEO

In figuur 1.4.6 is een vereenvoudigd schaakbord getekend met 16 velden. Ook is een cirkel getekend met straal 2 waarin we gaan spiegelen.



Figuur 1.4.6

a. Schrijf op welke verzamelingen elkaars inversiebeeld zijn.

b. Neem figuur 1.4.6 over in het tekenvenster.

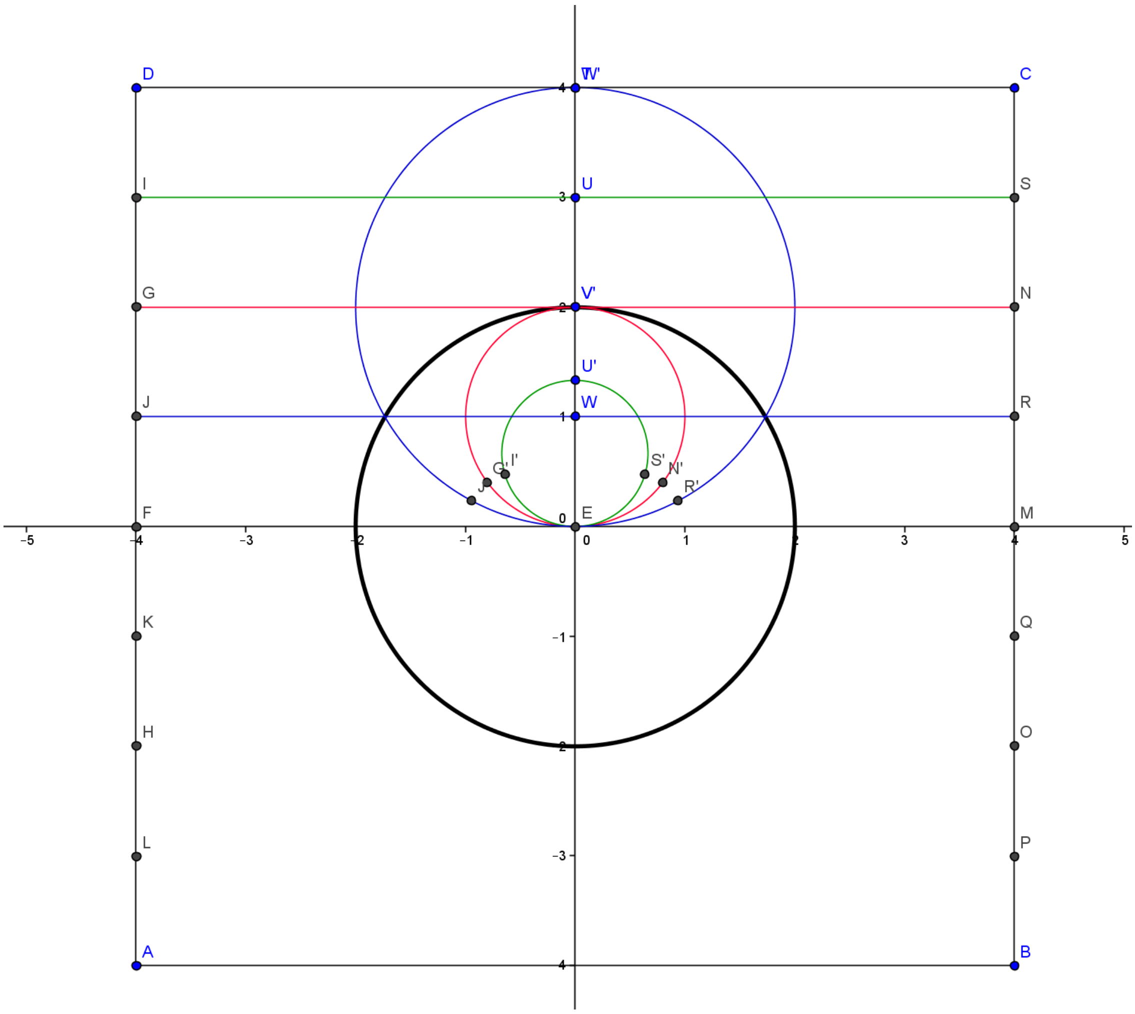
Veronderstel dat het vierkant (linksonder) met o.a. hoekpunten *K*,*F* en *R* zwart gekleurd is.

c. Kleur het inversiebeeld van dit vierkant zwart.

Opgave 1.4.7 GEO Inversiebeeld van schaakbord

a. Kun je, je nu een voorstelling maken van het inversiebeeld van het hele schaakbord van 64 velden?

Als dat nog niet zo lukt teken dan met GeoGebra een cirkel *c* met straal 2 en de oorsprong als middelpunt. Teken ook een vierkant van 8 bij 8 met de oorsprong als middelpunt op de manier waarop dat in figuur 1.4.3 is gedaan. Maak vervolgens van het vierkant een schaakbord.



Figuur 1.4.7

In figuur 1.4.7 zijn van drie lijnen *JR*, *GN* en *IS*, hierbij zijn alleen de bijbehorende lijnstukken gekleurd, de inversiebeelden ten opzichte van cirkel *c* te zien.

- **b.** Wat zijn nu de inversiebeelden van de drie lijnstukken *JR*, *GN* en *IS*?
- **c.** Inverteer het schaakbord en print je tekening.
- **d.** Ga na hoe het met de kleur van de velden zit.

Opgave 1.4.8

Kijk nog een goed naar de figuur van de omslag van het tijdschrift.

- **a.** Is het hele (normale) schaakbord op de omslag afgebeeld?
- **b.** Is ook het hele inversiebeeld van het vergrote schaakbord op de omslag weergegeven? Geef een duidelijke verklaring.